Svolgeremo l'unità didattica 7: I SISTEMI LINEARI

PROBLEMA: Date 2 rette trova il punto d'intersezione
Questo problema si risolve con l'introduzione dei …

SISTEMI LINEARI

Un **sistema lineare** di equazioni è un insieme di 2 o più equazioni di primo grado nelle stesse incognite. La soluzione di un sistema lineare è una soluzione comune a tutte le equazioni che lo compongono.
Graficamente ogni equazione del sistema è una retta e la soluzione corrisponde alla loro intersezione, che se esiste, è un punto.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \\ y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1} \end{cases}$$

Quindi data una qualsiasi equazione $ax + by = c$, ricaviamo $y = mx + q$ ponendo $m = -\frac{a}{b}$ e $q = +\frac{c}{b}$. In questo modo possiamo rappresentare le rette del sistema sul piano cartesiano e vedere graficamente se ci sono intersezioni.

Nella maggior parte dei casi, se guardiamo il grafico, non è possibile esprimere con certezza le coordinate del punto di intersezione, per questo introduciamo uno dei metodi analitici per la risoluzione di sistemi lineari:

METODO DI SOSTITUIZIONE

Spieghiamolo con un esercizio:

$$\begin{cases} 4x + y = 5 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$$

1) Ricaviamo un'incognita in funzione dell'altra in una delle due equazioni. In genere scegliamo, se c'è, quella con coefficiente unitario.

$$\begin{cases} y = -4x + 5 \\ \_\_ \end{cases}$$

2) **SOSTITUIAMO** il valore di y, ossia $-4x + 5$, nella seconda equazione

$$\begin{cases} y = -4x + 5 \\ 3x - 2 \cdot (\mathbf{-4x + 5}) = 12 \end{cases}$$

3) La seconda equazione ora è una eq.di 1°grado nella sola incognita x, quindi la risolviamo e troviamo il valore di x.

$$\begin{cases} y = -4x + 5 \\ 3x + 8x - 10 = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -4x + 5 \\ 11x = 22 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -4x + 5 \\ x = 2 \end{cases}$$

4) Ora che conosciamo il valore di x, cioè 2, lo sostituiamo nella prima equazione

$$\begin{cases} y = -4 \cdot (\mathbf{2}) + 5 \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -8 + 5 \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow (2, -3)$$

5) La soluzione esiste ed è il punto di coordinate $(2, -3)$

Graficamente…

1) Mi scrivo le equazioni nella forma y=mx+q
   La prima equazione la chiamo r: $y = -4x + 5$ poiché $m = -\frac{a}{b} = \frac{4}{1} = 4$ e $q = \frac{c}{b} = \frac{5}{1} = 5$; la seconda la chiamo s: $y = \frac{3}{2}x - 6$.
2) Faccio le tabelline per trovare i punti

r:

x	$y = -4x + 5$	Punti
0	$-4 \cdot (0) + 5 = 5$	(0,5)
1	$-4 \cdot (1) + 5 = 1$	(1,1)
2	$-4 \cdot (2) + 5 = 3$	(2,3)

s:

x	$y = \frac{3}{2}x - 6$	Punti
0	$3/2 \cdot (0) - 6 = -6$	(0,-6)
2	$3/2 \cdot (2) - 6 = -3$	(2,-3)
4	$3/2 \cdot (4) - 6 = 0$	(4,0)

3) Rappresento tutto nel grafico e verifico la compatibilità della soluzione precedente con il disegno.

Il sistema può essere:

1) DETERMINATO: trovo una soluzione del tipo (x_0, y_0), quindi le rette si intersecano in un solo punto.
2) INDETERMINATO: trovo infinite soluzioni (0=0, 1=1, …).
   Graficamente le rette sono coincidenti, cioè vediamo una sola retta.
3) IMPOSSIBILE: non esistono soluzioni (1=0, -2=5, …).
   Graficamente le rette sono parallele, quindi non si incontrano mai.

ESERCITAZIONE 12

Svolgiamo insieme i seguenti esercizi (vedi pag seguente)

1) $\begin{cases} x+3y=-1 \\ x-y=7 \end{cases}$ $(5,-2)$

2) $\begin{cases} 2x-y=2 \\ x+2y=11 \end{cases}$ $(3,4)$

Ora risolvi tu

1) $\begin{cases} 3x+2y=-2 \\ -5x+y=-1 \end{cases}$ $(0,-1)$

2) $\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=9 \end{cases}$ $(6,3)$

3) $\begin{cases} 2x-5y=7 \\ x-3y=1 \end{cases}$ $(16,5)$

Disegna le seguenti rette:

- $y=x+7$
- $y=2x-2$
- $y=5x-1$

esempio rette:

x	$y=5x-4$
0	$\mathbf{5(0)-4=0-4=-4}$
1	$\mathbf{5(1)-4=5-4=1}$
2	$\mathbf{5(2)-4=10-4=6}$

prendo le coppie di punti sul piano cartesiamo

esempio svolto es1

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

scelgo l'incognita con coefficiente unitario (cioè senza numero espresso davanti), nel nostro caso abbiamo 2 possibilità

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} + 3y = -1 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

scelgo la seconda perché più semplice, ma il risultato non cambia se fate una scelta diversa

Sposto i termini che non mi servono a destra, in modo da isolare la x scelta

Ricorda: quando sposto i termini devo cambiare segno

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ x - y = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 3y = -1 \\ x = +y + 7 \end{cases}$$

Dato che x è uguale a y+7 sostituisco nella prima equazione al posto di x l'equazione trovata

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ x = +y + 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} +y + 7 + 3y = -1 \\ x = +y + 7 \end{cases}$$

ora la prima equazione è una semplice eq. di 1 grado nell'incognita y, la risolvo seguendo le regole delle equazioni (a sinistra le incognite (lettere) a destra i numeri, quando sposto i termini cambio il segno)

$$\begin{cases} +y + 7 + 3y = -1 \\ x = +y + 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} +y + 3y = -1 - 7 \\ x = +y + 7 \end{cases}$$

ora sommo e divido per il coefficiente di y

$$\begin{cases} 4y = -8 \\ x = +y + 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-8}{4} \\ x = +y + 7 \end{cases}$$

Ottengo così il valore di y, lo sostituisco nella seconda equazione per trovare il valore di x

$$\begin{cases} y = -2 \\ x = +y + 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = -2 + 7 = 5 \end{cases}$$

Abbiamo trovato il punto di intersezione delle rette P(x,y)=(5,-2)

esempio svolto es2

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + 2y = 11 \end{cases}$$

scelgo l'incognita con coefficiente unitario (cioè senza numero espresso davanti), nel nostro caso abbiamo 1 possibilità

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + 2y = 11 \end{cases}$$

Sposto i termini che non mi servono a destra, in modo da isolare la x scelta
Ricorda: quando sposto i termini devo cambiare segno

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x = -2y + 11 \end{cases}$$

Dato che x è uguale a $-2y + 11$ sostituisco nella prima equazione al posto di x l'equazione trovata

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x = -2y + 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2(-2y + 11) - y = 2 \\ x = -2y + 11 \end{cases}$$

ora la prima equazione è una semplice eq. di 1 grado nell'incognita y, la risolvo seguendo le regole delle equazioni: prima moltiplico la prima parentesi, poi metto a sinistra le incognite (lettere) a destra i numeri, quando sposto i termini cambio il segno

$$\begin{cases} -4y + 22 - y = 2 \\ x = -2y + 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4y - y = 2 - 22 \\ x = -2y + 11 \end{cases}$$

ora sommo e divido per il coefficiente di y

$$\begin{cases} -5y = -20 \\ x = -2y + 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-20}{-5} \\ x = -2y + 11 \end{cases}$$

Ottengo così il valore di y, lo sostituisco nella seconda equazione per trovare il valore di x

$$\begin{cases} y = 4 \\ x = -2y + 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = -2(4) + 11 = -8 + 11 = 3 \end{cases}$$

Abbiamo trovato il punto di intersezione delle rette P(x,y)=(3,4)

ESERCITAZONE 13

Risolvi con il metodo di sostituzione

1) $\begin{cases} x + 3y = -1 \\ x - y = 7 \end{cases}$ $(5, -2$

2) $\begin{cases} -x + y = 10 \\ x + y = -2 \end{cases}$ $(-6, +4)$

3) $\begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ -5x + y = -1 \end{cases}$ $(0, -1)$

Disegna le seguenti rette:

$y = x - 7$
$y = 2x + 4$
$y = 5$

ESERCITAZIONE 14

Risolvi col metodo di sostituzione

1) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$ $(1,2)$

2) $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 6x + 4y = 14 \end{cases}$ $indet.$

3) $\begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ -2x + y = -2 \end{cases}$ $imposs.$

Esempi svolti:

$$\begin{cases} \boldsymbol{-3x + y = 1} \\ \boldsymbol{3x - y = -1} \end{cases}$$

scelgo l'incognita con coefficiente unitario (cioè senza numero espresso davanti), nel nostro caso abbiamo 1 possibilità
Sposto i termini che non mi servono a destra, in modo da isolare la x scelta
Ricorda: quando sposto i termini devo cambiare segno

$$\begin{cases} -3x + y = 1 \\ 3x - y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = +3x + 1 \\ 3x - y = -1 \end{cases}$$

Dato che y è uguale a 3x+1 sostituisco nella prima equazione al posto di y l'equazione trovata

$$\begin{cases} y = +3x + 1 \\ 3x - y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = +3x + 1 \\ 3x - (+3x + 1) = -1 \end{cases}$$

ora la seconda equazione è una semplice eq. di 1 grado nell'incognita x, la risolvo seguendo le regole delle equazioni (a sinistra le incognite (lettere) a destra i numeri, quando sposto i termini cambio il segno)

$$\begin{cases} y = +3x + 1 \\ 3x - (+3x + 1) = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = +3x + 1 \\ 3x - 3x - 1 = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = +3x + 1 \\ 3x - 3x = -1 + 1 \end{cases}$$

sommo e scompare l'incognita

$$\begin{cases} y = +3x + 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Dato che 0=0 è sempre vero, diciamo che il sistema è indeterminato, quindi le due rette sono coincidenti, ossia si incontrano in tutti i punti

$$\begin{cases} \mathbf{2x+y=3} \\ \mathbf{2x+y=4} \end{cases}$$

scelgo l'incognita con coefficiente unitario (cioè senza numero espresso davanti), nel nostro caso abbiamo 2 possibilità, io scelgo la prima equazione. Sposto i termini che non mi servono a destra, in modo da isolare la x scelta
Ricorda: quando sposto i termini devo cambiare segno

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ 2x+y=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-2x+3 \\ 2x+y=4 \end{cases}$$

Dato che y è uguale a -2x+3 sostituisco nella prima equazione al posto di y l'equazione trovata

$$\begin{cases} y=-2x+3 \\ 2x+y=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-2x+3 \\ 2x-2x+3=4 \end{cases}$$

ora la seconda equazione è una semplice eq. di 1 grado nell'incognita x, la risolvo seguendo le regole delle equazioni (a sinistra le incognite (lettere) a destra i numeri, quando sposto i termini cambio il segno)

$$\begin{cases} y=-2x+3 \\ 2x-2x+3=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-2x+3 \\ 2x-2x=4-3 \end{cases}$$

sommo e scompare l'incognita

$$\begin{cases} y=-2x+3 \\ 0=1 \end{cases}$$

Dato che 0=1 non è mai vero, diciamo che il sistema è impossibile, quindi le due rette non si incontreranno mai, cioè sono parallele

ESERCITAZIONE 15 (EPC)

Risolvi col metodo di sostituzione

1) $\begin{cases} 7x - y = 120 \\ x + y = 40 \end{cases}$ $(20,20)$

2) $\begin{cases} -3x + y = -2 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$ $indet.$

3) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ $(1,2)$

4) $\begin{cases} 4x + y = 2 \\ 4x + y = -2 \end{cases}$ $imposs.$

TEST DI VERIFICA UD 7

Risolvi col metodo di sostituzione

1) $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ 3x + 5y = -4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -2x + y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + y = -6 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$