GRANDEZZE ALTERNATE

Sono state considerate, finora, correnti continue, cioè correnti di valore costante e determinato.

Le correnti di maggiori applicazioni industriali sono quelle che si propagano lungo i conduttori con legge alternata nel tempo; da ciò il loro nome di ***correnti alternate***.

Questa correnti si concepiscono, appunto, come un movimento oscillatorio degli elettroni lungo i conduttori. Nella tecnica dei trasporti di energia le correnti alternate hanno un posto di gran lunga preponderante rispetto alla corrente continua nonostante tentativi anche recenti di utilizzare quest'ultima. Tra i vantaggi offerti dalla corrente alternata citiamo:

1. la maggiore semplicità delle macchine con cui può venire generata;
2. la possibilità di elevare in partenza la tensione per rendere più economico il trasporto ed abbassare la tensione in arrivo al valore più atto all'utilizzazione per mezzo di trasformatori statici e di elevatissimo rendimento;
3. poter impiegare per l'utilizzazione il più semplice ed economico motore elettrico cioè il motore asincrono.

Tra gli svantaggi ricordiamo la caduta di tensione reattiva ed il maggior effetto corona.

Si chiama ***grandezza alternata*** qualsiasi grandezza che, nel tempo, soddisfi alla condizione di essere ***periodica*** cioè di assumere la medesima serie di valori in intervalli di tempo uguali e successivi, e di presentare un valore medio nullo in ogni intervallo di tempo.

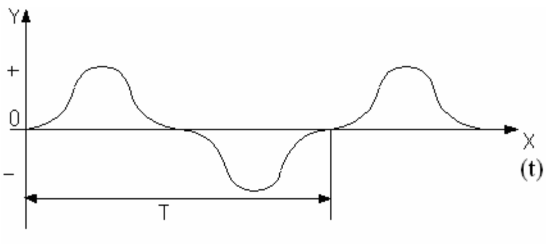


Figura A

Nel diagramma cartesiano in cui sulle ascisse ho il tempo e nelle ordinate i valori istantanei y la curva rappresenta una grandezza alternata periodica.

L'intervallo di tempo, misurato in secondi, intercorso per compiere un ciclo si chiama **periodo T.**

Il reciproco del periodo 1/T definisce il numero dei periodi al secondo, cioè la frequenza " f " ossia il numero delle volte in cui la grandezza assume tutti i suoi valori in un secondo: $f = \frac{1}{T}$.

La frequenza si misura in sec^{-1} e si chiama Hertz (Hz) o periodi al secondo (p/s).

GRANDEZZE ALTERNATE SINUSOIDALI

(Rappresentazione Trigonometrica)

Le macchine generatrici in corrente alternata (alternatori) forniscono f.e.m. alternate aventi forma sinusoidale. Si definisce sinusoidale la grandezza alternata che varia proporzionalmente al seno di un angolo descritto da un segmento che ruota attorno all'origine con velocità angolare uniforme ω (ricordate che ω misurato in rad/sec = ω 2πn dove n è il numero di giri al secondo).

$$y = Y_M \, sen\omega t$$

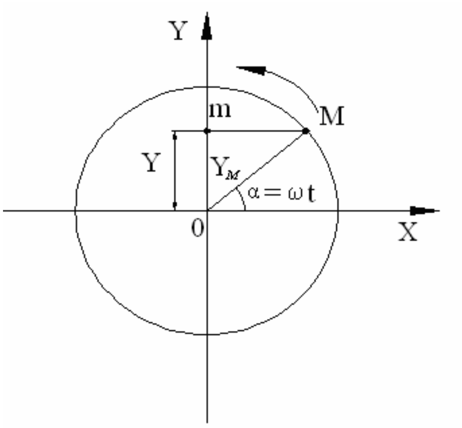


Figura B

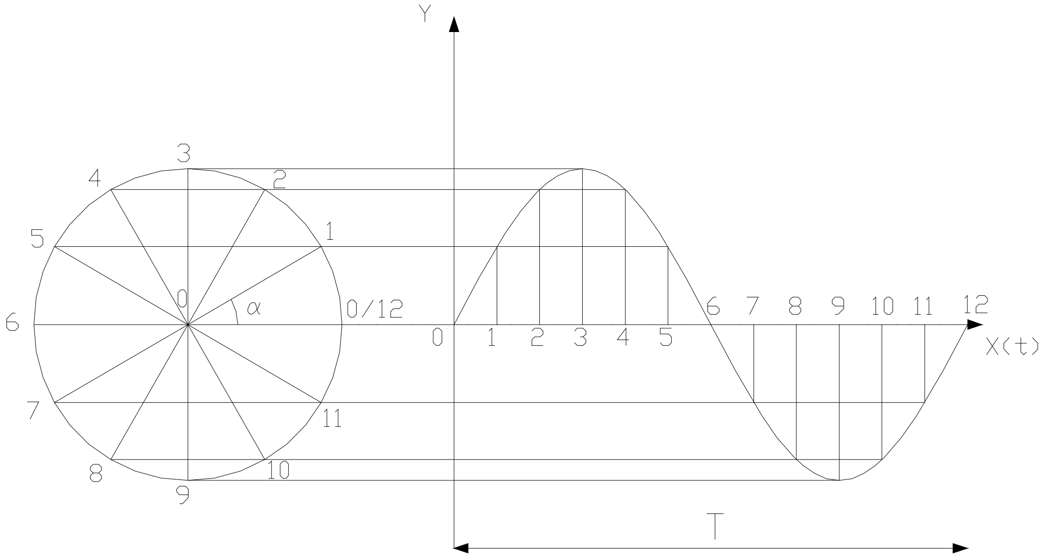
Quindi y indica i successivi valori istantanei della grandezza alternata sinusoidale; Y_M indica il valore massimo o ampiezza e ωt determina la misura dell'angolo, espresso in radianti, descritto dal segmento rotante nel tempo t.

Costruiamo ora il diagramma che rappresenta nel tempo la funzione $y = Y_M \, sen\omega t$; a tal scopo si traccia una circonferenza di raggio Y_M e si fa ruotare tale raggio in senso antiorario con velocità ω: i valori successivi di y sono le proiezioni sull'asse Y del segmento rotante Y_M = OM.

Mentre il segmento rotante descrive il primo quadrante da 0° a 90° a partire dall'asse di riferimento X la sua posizione sull'asse Y (Om) cresce da zero fino a coprire l'intero raggio OA; il seno descritto dal segmento varia da 0 ad 1 e la funzione y assume tutti i valori a partire da zero fino a raggiungere il valore massimo Y_M.

Nel secondo quadrante invece (da 90° a 180°) la proiezione del segmento rotante decresce dal valore OM a zero; il seno dell'angolo varia da 1 a 0 e la funzione y decresce in proporzione da Y_M a zero. Nel mezzo giro successivo (da 180° a 360°) si ripetono le stesse vicende con il segno cambiato e così di seguito per tutti i periodi successivi.

A questo punto prefissato un sistema di assi cartesiani con le ordinate rappresentate dai valori assunti da y e con ascisse i tempi, si può costruire la curva rappresentativa della funzione y; essa è una curva sinusoidale di ampiezza Y_M.



Il periodo T di questa funzione corrisponde al tempo impiegato dal segmento rotante a descrivere un giro completo; se ω è la velocità angolare espressa in rad/sec, risulta perciò: $T=2\pi/\omega$. Il fatto che la curva ottenuta sia proprio la funzione $\mathbf{y = Y_M \text{ sen } \omega t}$ è anche verificabile dalla trigonometria; difatti $y_1 = \overline{01}$ sen $\alpha_1 = Y_M$ sen $\alpha_1 = Y_M$ sen ωt_1 ; $y_2 = \overline{02}$ sen $\alpha_2 = Y_M$ sen $\alpha_2 = Y_M$ sen ωt_2 ecc... ove t_1 e t_2 indicano i tempi trascorsi a partire dall'istante in cui la grandezza è nulla ed ωt_1 e ωt_2 ecc... la misura del corrispondente angolo percorso dal raggio nel considerato tempo.

Come visto l'asse delle ascisse della curva sinusoidale può venire così graduata sia in tempi (secondi), sia in angoli (radianti o gradi). Si dirà perciò che un periodo T corrisponde a 2π radianti o 360°, mezzo periodo o π rad o 180° e così via.

Il numero di periodi al secondo, e cioè la **frequenza f** risulta $\mathbf{f=1/T=\omega/2\pi}$ ed inoltre $\mathbf{\omega=2\pi/T = 2\pi f}$.

VALORE EFFICACE, VALORE MEDIO E FATTORE DI FORMA

Le grandezze alternate sinusoidali sono caratterizzate dal valore efficace, valore medio e fattore di forma.

VALORE EFFICACE

Nella pratica tecnica si usa commisurare l'intensità di una corrente alternata a quella di una corrente continua " ***termicamente*** **"** equivalente.

A tale scopo si definisce come **" *valore o intensità efficace* " di una corrente alternata, quel valore che dovrebbe avere una corrente continua circolante nello stesso circuito, per produrre nel corso di ogni periodo la stessa quantità di calore.** Se si pensa che la potenza elettrica dissipata per effetto Joule varia proporzionalmente al quadrato delle correnti, si comprende che l'energia W dissipata da una corrente alternata nel corso di un periodo si deve esprimere mediante una sommatoria del tipo $W = R\sum_0^T i^2 \times \Delta t$.

Volendo stabilire l'equivalenza termica con una corrente costante I si scrive:

$$R\sum_0^T i^2 \times \Delta t = R \times I^2 \times T$$

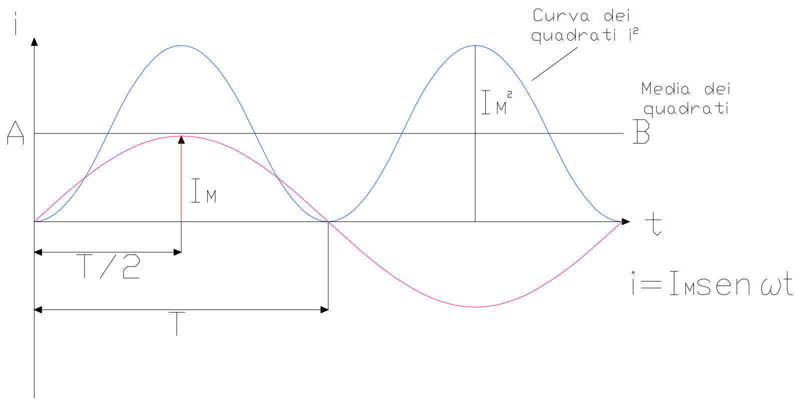


Figura C

Ne risulta $I^2 = \frac{\sum_0^T i^2 \times \Delta t}{T}$ e quindi $I = \sqrt{\frac{\sum_0^T i^2 \times \Delta t}{T}}$; si esprime questo fatto dicendo che " **il valore efficace I di una corrente alternata corrisponde alla radice quadrata della media aritmetica dei quadrati di tutti i valori istantanei nel corso di un periodo "**. In base a ciò per ricercare il valore efficace di una corrente alternata sinusoidale, i = I_M sen ωt, si costruisce per punti la curva che ha per ordinate i quadrati dei valori istantanei. Si noti che i quadrati sono tutti positivi e che ha frequenza doppia di quella della corrente e che è una sinusoide tangente inferiormente all'asse dei tempi. Dopodiché si segna il rettangolo equivalente dell'area racchiusa dalla curva dei quadrati, l'altezza di questo rettangolo rappresenta la media di tutti i quadrati ed è uguale perciò al quadrato del valore efficace della corrente. Infatti posto:

i = I_M senωt si ha $i^2 = I_M^2$ sen^2ωt. Però sen^2ωt = 1-cos^2ωt e cos^2ωt = cos2ωt+sen^2ωt. Per cui si ha: sen^2ωt= 1-cos2ωt - sen^2ωt e perciò 2sen^2ωt = 1- cos2 ωt.

Sostituendo si ha $i^2 = I_M{}^2 \frac{1-\cos 2\omega t}{2} = \frac{I_M{}^2}{2} - \frac{I_M{}^2}{2} \times \cos 2\omega t$.

A questo punto si sa dalla trigonometria che il coseno di un dato angolo è uguale e contrario di un angolo più piccolo di π/2 di quello dato cioè cosφ = - sen (φ-90) per cui:

$$\boxed{i^2 = \frac{I_M^2}{2} + \frac{I_M^2}{2} \text{ sen } \left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

Analizziamo tale risultato:

il primo termine è costante e rappresenta perciò una retta orizzontale AB avente un'ordinata pari a ½ I_M^2; il secondo termine invece rappresenta un onda sinusoidale di valore massimo ½ I_M^2, di pulsazione 2ω, vale a dire di frequenza doppia di quella della corrente e di fase iniziale -π/2 e di valore medio zero.

Ciò significa che la curva dei quadrati dei valori istantanei della corrente è precisamente una sinusoide di frequenza doppia e che ha per asse di simmetria la retta AB. Questa stessa retta delimita perciò anche il rettangolo equivalente all'area racchiusa dalla curva dei quadrati dei valori istantanei, e cioè quel rettangolo avente per altezza il quadrato del valore efficace I della corrente.

Si può dunque affermare che per una corrente di forma sinusoidale il quadrato del valore efficace corrisponde alla metà del valore massimo perciò $I^2 = \frac{1}{2} I^2{}_M$ **e quindi**

$$\boxed{I = \frac{I_M}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ I_M}$$

Tali considerazioni si estendono praticamente a tutte le grandezze alternate di forma sinusoidale e si dice che per tutte le grandezze alternate sinusoidali il valore efficace è sempre uguale al valore massimo diviso per $\sqrt{2}$ **.**

Nella pratica tecnica quando si esprime l'intensità di una corrente o il valore di una tensione si intende sempre, salvo dichiarazione contraria, ai rispettivi valori efficaci che vengono sempre indicati con lettera maiuscola. Anche gli strumenti di misura di correnti e tensioni alternate forniscono sempre la misura dei valori efficaci, ciò è del resto una conseguenza implicita nello stesso principio di funzionamento di questi apparecchi. Infatti gli strumenti per corrente alternata devono essere tali da deviare sempre nello stesso verso anche quando la corrente si inverte; essi devono perciò sfruttare quelle azioni che variano proporzionalmente al quadrato della corrente, quali sono in particolare l'effetto Joule (strumenti termici o a filo caldo) e le azioni elettrodinamiche (strumenti elettrodinamici). Se la frequenza della corrente fosse molto bassa e l'inerzia dello strumento fosse trascurabile, l'equipaggio mobile segnerebbe così le vicende rappresentate dalla curva dei quadrati dei valori istantanei. All'atto pratico invece l'equipaggio mobile non può seguire le rapide variazioni periodiche della coppia che lo sollecita, ma si ferma nella posizione di equilibrio che rimane determinata dalla coppia media. In tal modo la deviazione che si legge sulla scala viene a dipendere dalla media dei quadrati dei valori istantanei e perciò in definitiva dal quadrato del valore efficace.

VALORE MEDIO E FATTORE DI FORMA

Abbiamo già detto che qualunque grandezza alternata soddisfa sempre alla condizione di presentare nel corso di un periodo un valore medio sempre uguale a 0.

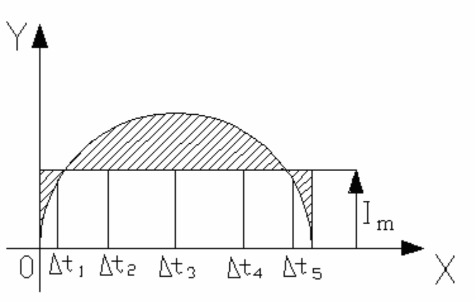


Figura D

Talvolta però interessa considerare IL VALORE MEDIO nell'intervallo di mezzo periodo: questo valore che corrisponde all'ordinata media di una semionda, viene indicato con lettera maiuscola e indice m. In poche parole significa: $I_m = \frac{Area\ della\ semionda}{\frac{T}{2}} = \frac{2S}{T}$. Nel caso di un onda alternata sinusoidale si avrà: $I_m = \frac{\sum_0^{\frac{T}{2}} i\ x\ \Delta t}{\frac{T}{2}}$;

sviluppando opportunamente tale equazione si giunge al seguente risultato: $\mathbf{I_m = \frac{2}{\pi} I_M}$ e quindi il valore medio di una grandezza alternata sinusoidale vale $\frac{2}{\pi}$ volte il rispettivo valore MASSIMO. Analizzando tale risultato vedo che il valore medio I_m di un onda sinusoidale è minore del valore efficace; il rapporto fra questo e il primo è infatti:

$$\frac{I}{I_m} = \frac{\frac{I_M}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\pi} I_M} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cong 1{,}11$$

Tale valore di 1,11 è caratteristico delle sole forme sinusoidali, per le onde alternative deformate invece il rapporto fra il valore efficace e il valore medio risulta più o meno diverso da 1,11.

Il rapporto $Kf = \frac{I}{I_m} = \left(\frac{Valore\ efficace}{Valore\ medio}\right)$ prende il nome di **FATTORE DI FORMA**.

RELAZIONE FRA GRANDEZZE SINUSOIDALI

Nello studio delle correnti alternate si presenta sovente il caso in cui si deve trattare contemporaneamente con più grandezze sinusoidali. A tale proposito si considererà sempre che le varie grandezze sinusoidali di partenza siano isofrequenziali fra loro, cioè tali da presentare la stessa frequenza f o pulsazione ω. Si abbiano due grandezze sinusoidali isofrequenziali v ed i.

Queste grandezze sono rappresentate nel seguente modo:

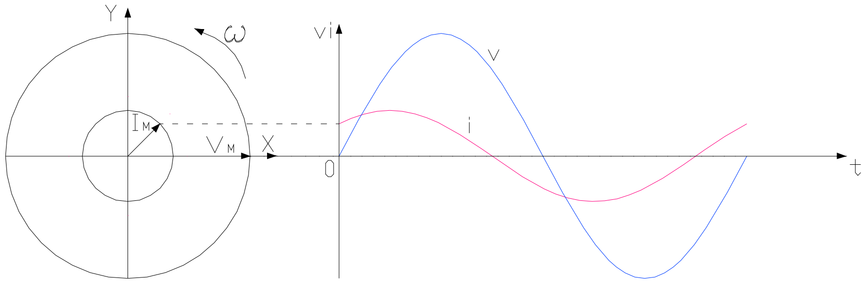


Figura E

Mentre analiticamente esse vengono individuate dalle seguenti espressioni :

$$i = I_M \text{ sen } (\omega t+\varphi) \qquad\qquad v = V_M \text{ sen } \omega t$$

Se osserviamo le due grandezze notiamo che hanno la stessa pulsazione ma che sono **“ *sfasate* “**fra di loro e cioè le due grandezze hanno un angolo di sfasamento φ. In particolare si dice che la grandezza **i** è in “ ***anticipo*** “dell’angolo **φ** sulla grandezza **v**. Questo perché la grandezza **i** raggiunge prima della grandezza **v** il valore massimo. Naturalmente si può anche dire che **v** è in **“ *ritardo* “** su **i**. **L’angolo φ fra le due grandezze viene denominato *ANGOLO DI SFASAMENTO* o *ANGOLO DI FASE o FASE*. La fase di una grandezza sinusoidale resta quindi definita in generale come la frazione di periodo che è già trascorso nell’istante in cui si inizia a contare il tempo (t = 0).**

Vediamo ora il caso della grandezza **i** in ritardo di φ sulla grandezza **v**.

$$v = V_M \text{ sen } \omega t \qquad\qquad i = I_M \text{ sen } (\omega t - \varphi)$$

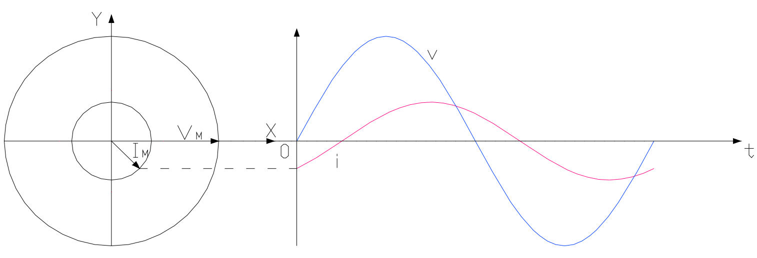


Figura F

a) Grandezze in fase

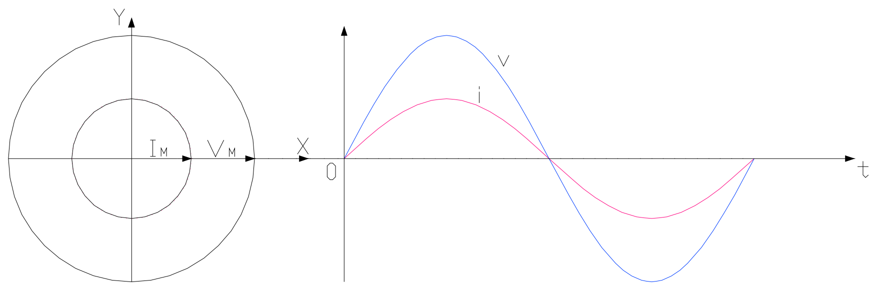


Figura G

Quando è zero la differenza di fase delle due grandezze, cioè le due grandezze passano per i valori massimi positivi, negativi e per lo 0 nello stesso istante.

b) Grandezze in quadratura in anticipo o in ritardo (le due grandezze sono sfasate fra di loro di 90° cioè un quarto di periodo)

quadratura in anticipo (i su v) :

$$v = V_M \text{ sen } \omega t \qquad\qquad i = I_M \text{ sen } (\omega t + \pi/2)$$

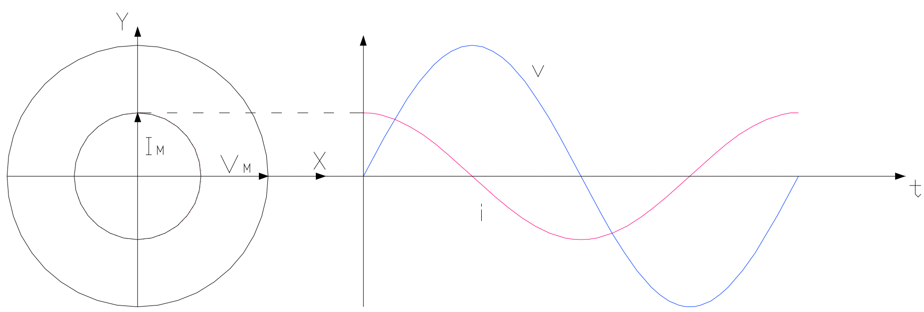


Figura H

quadratura in ritardo (i su v)

$$v = V_M \operatorname{sen} \omega t \qquad\qquad i = I_M \operatorname{sen} (\omega t - \pi/2)$$

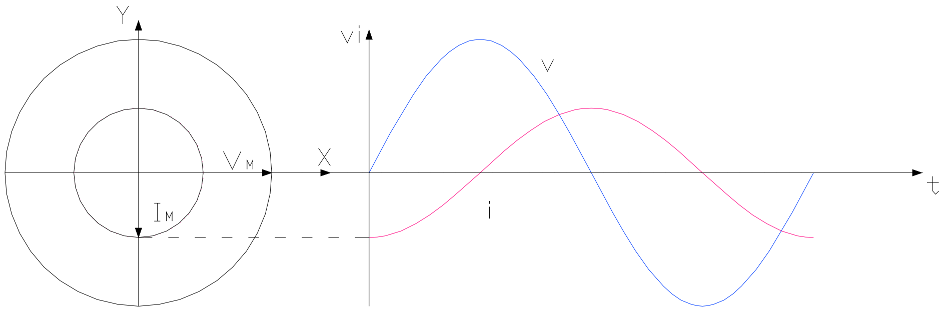


Figura I

c) in opposizione

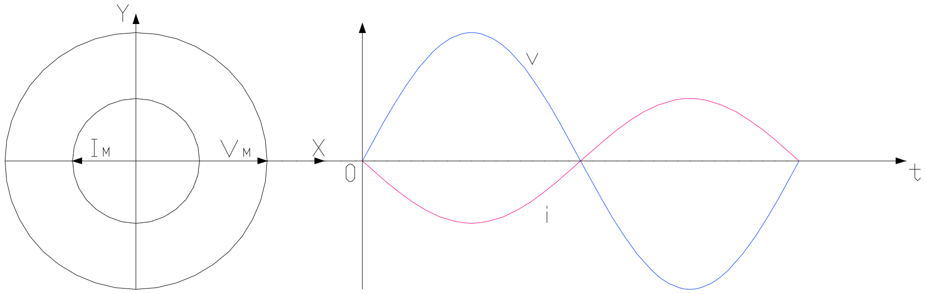


Figura J

ESERCIZIO:

Determinare il valore della corrente ai morsetti di un resistore da 10 Ω interessato da una tensione sinusoidale

$$\upsilon\ (t) = 50 \text{ sen } 314\ t$$

Determinare anche il valore efficace.

$V_M = 50$ V ; $\quad I_M = \frac{V_M}{R} = \frac{50}{10} = 5$ A $\quad I = \frac{I_M}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = 3{,}54$ A

ESERCIZIO:

Determinare il valore della tensione ai morsetti di un resistore da 20 Ω interessato da una corrente sinusoidale

$$i\ (t) = \sqrt{2}\ 10 \text{ sen } (\omega t + 40°)$$

Determinare anche il valore efficace.

$\upsilon\ (t) = R\ i\ (t) = 20\sqrt{2}\ 10 \text{ sen } (\omega t + 40°)$

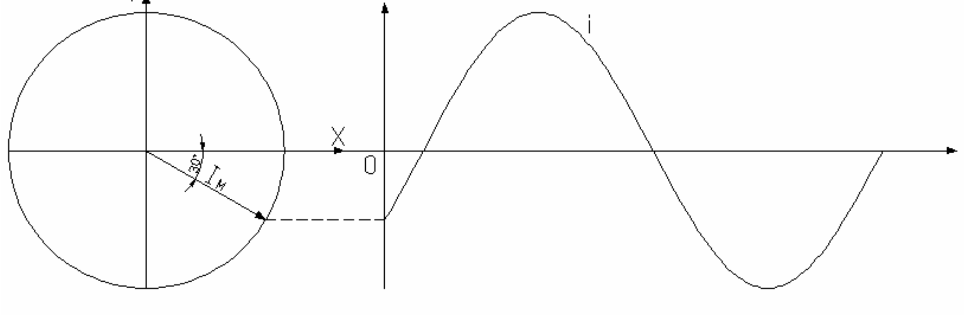
$V_M = 283$ V ; $\quad V = \frac{V_M}{\sqrt{2}} = \frac{283}{\sqrt{2}} = 200$ V

ESERCIZIO:

Analizzare la corrente sinusoidale e tracciare il diagramma

$$i = 8 \text{ sen } (\ \omega\ t - 30°\ )$$

$I_M = 8$ A $\quad I = \frac{I_M}{\sqrt{2}} = 5{,}6$ A $\quad \varphi = -30°$

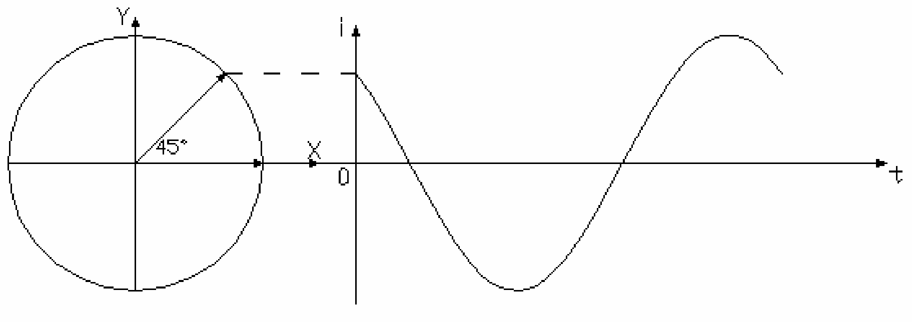


ESERCIZIO:

Analizzare la corrente sinusoidale e tracciare il diagramma

$$i = 12 \text{ sen } (\omega t + 45°)$$

$I_M = 12$ A $I = \frac{I_M}{\sqrt{2}} = 8{,}48$ A $\varphi = +45°$



ESERCIZIO:

Determinare la pulsazione, la frequenza, la fase, il valore medio ed efficace delle seguenti sinusoidi :

$\upsilon_1 = 200 \text{ sen } (1000\, t + \frac{\pi}{6})$ $\upsilon_2 = 150 \text{ sen } (314\, t)$

$\upsilon_3 = 300 \text{ sen } (500\, t - \pi)$ $\upsilon_4 = 380 \text{ sen } (314\, t + \frac{2}{3}\pi)$

υ_1 = 200 sen (1000 t + $\frac{\pi}{6}$) : $\omega_1 = 1000$ rad/sec $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 160$ Hz

$\varphi_1 = \frac{\pi}{6} = 30°$ anticipo $V_{1m} = \frac{2}{\pi} V_M = 127$ V $V_1 = \frac{V_M}{\sqrt{2}} = 142$ V

υ_2 = 150 sen (314 t) : $\omega_2 = 314$ rad/sec $f_2 = 50$ Hz

$\varphi_2 = 0°$ $V_{2m} = 95$V $V_2 = 106$ V

υ_3 = 300 sen (500 t - π) : $\omega_3 = 500$ rad/sec $f_3 = 80$ Hz

$\varphi_3 = - 180°$ $V_{3m} = 191$ V $V_2 = 212$ V

υ_4 = 380 sen (314 t + $\frac{2}{3}\pi$) : $\omega_4 = 314$ rad/sec $f_4 = 50$ Hz

$\varphi_4 = + 120°$ $V_{4m} = 242$ V $V_4 = 268$ V

ESERCIZIO:

Effettuare la somma e la differenza tra i seguenti vettori:

$$\overline{V_1} = 20 \text{ V} \angle 30° \qquad \overline{V_2} = 30 \text{ V} \angle -60°$$

Trasformiamoli in forma simbolica :

$\overline{V_1} = V_1(\cos \varphi_1 + j \operatorname{sen} \varphi_1) = 20 (0{,}866 + j\ 0{,}5) = 17{,}32 + j\ 10$

$\overline{V_2} = V_2 (\cos \varphi_2 + j \operatorname{sen} \varphi_2) = 30 (0{,}5 - j\ 0{,}866) = 15 - j\ 26$

$\overline{V_S} = \overline{V_1} + \overline{V_2} = 32{,}32 – j16 \qquad V = 36 \text{ V}$

$\overline{V_D} = \overline{V_1} - \overline{V_2} = 2{,}32 + j36 \qquad V = 36 \text{ V}$
